

FUNCIONES

1.- Calcula el dominio y los puntos de intersección con los ejes de las funciones:

a) $y = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

Sol: a) (-2,0), (2,0), dom: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; b) (-3,0), (3,0), dom: $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

2.- Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 1$

b) $y = -x + 2$

c) $y = \frac{x+2}{x-2}$

d) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

e) $y = \sqrt{x+2}$

f) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

g) $y = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

h) $y = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 5x - 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

i) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x}}$

j) $y = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 4}$

k) $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x - 2}}$ l) $y = \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

Sol: a) \mathbb{R} ; b) \mathbb{R} c) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; d) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; e) $[-2, +\infty)$; f) $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$; g) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; h) \mathbb{R}
i) $[-2, 0) \cup [2, +\infty)$; j) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; k) $(2, +\infty)$; l) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

3.- Representa las funciones:

a) $y = 2$

b) $y = x + 3$

c) $y = -3x$

d) $y = x^2 + 2x - 3$

e) $y = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

f) $y = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x < 5 \\ -x + 10 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

4.- Siendo $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = (x-2)/x$ y $h(x) = x^2/(x-1)$. Calcula:

a) $(h \circ g)(x)$

b) $(f \circ g)(x)$

c) $(f \circ h)(x)$

d) $(g \circ h)(x)$

e) $f^{-1}(x)$

f) $g^{-1}(x)$

g) $h^{-1}(x)$.

SOL: a) $\frac{(x-2)^2}{x^2(x-1)}$; b) $\frac{(x-2)^2}{x^2} + 1$; c) $\left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2 + 1$; d) $\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}$; e) $y = \sqrt{x-1}$; f) $y = \frac{-2}{x-1}$;

g) $y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4x}}{2}$

5.- Hallar la función inversa de:

a) $y = \frac{2x+1}{x+3}$

b) $y = \frac{x+5}{2x-2}$

c) $y = \frac{x-1}{x+2}$

d) $y = \frac{2x+1}{x-1}$

Sol: a) $y = \frac{1-3x}{x-2}$; b) $y = \frac{2x+5}{2x-1}$; c) $y = \frac{2x+1}{1-x}$; d) $y = \frac{x+1}{x-2}$

6.- Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x^2 + x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x}{2x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x^2}{x} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{2x}$$

Sol: a) 3; b) 1/2; c) 0; d) -3/2

7.- Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x}{x^2 + x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 + 3x + 2} \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$$

Sol: a) 2; b) 1; c) 1/4; d) 1; e) -1; f) 8

7.- Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+1)^2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} -(x+3)^2$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{(x+2)^2} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{x}$$

Sol: a) 0; b) $-\infty$; c) 0; d) $+\infty$

8.- Representa las gráficas de estas funciones y di si son continuas o discontinuas en $x=1$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sol: a) continua; b) discontinua en $x=0$; c) discontinua en $x=0$

9.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ Halla:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Sol: a) 1; b) 4; c) 2

10.- Comprueba si la función $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es continua en $x=0$.

Sol: sí

11.- Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{3} & \text{si } x \leq 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{en } x=1 \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{en } x=0$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2+4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{en } x=0$$

Sol: a) No; b) No; c) Sí

12.- Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{3x}{x-1}$$

$$b) f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

$$c) f(x) = \frac{4}{3-x}$$

$$d) f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$e) f(x) = \frac{2x}{x^2-x}$$

$$f) f(x) = \frac{-x}{(x+2)^2}$$

Sol: a) x=1, y=3; b) x=-2, y=1; c) x=3, y=0; d) y=0; e) x=1, y=0; f) x=-2, y=0

13.- Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:

$$a) f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

$$b) f(x) = \frac{2-x^2}{x}$$

$$c) f(x) = \frac{3x^2-1}{2x}$$

$$d) f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x-1}$$

$$e) f(x) = \frac{2x^3-2}{x^2-x}$$

$$f) f(x) = \frac{-2x^2+3}{x+1}$$

Sol: a) y=x-2; b) y=-x; c) y=3x/2; d) y=x+3; e) y=2x+2; f) -2x+2

14.- Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:

$$a) f(x) = \frac{1+x}{2x+3}$$

$$b) f(x) = \frac{3x+1}{x-4}$$

$$c) f(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$$

$$d) f(x) = \frac{2x^2}{x^2+x+3}$$

$$e) f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$f) f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$$

Sol: a) x=-3/2, y=1/2; b) x=4, y=3; c) y=0; d) y=2; e) x=1, x=-1, y=0; f) x=1, y=2x+2

15.- Estudia el comportamiento de estas funciones (límites laterales) en los puntos en los que no están definidas:

$$a) f(x) = \frac{1}{(2-x)^2} \quad b) f(x) = \frac{x+1}{x-3} \quad c) f(x) = \frac{1}{x^2-x} \quad d) f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Sol: a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty; \quad b) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

16.- Comprueba los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} \right) = \frac{1}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2x} \right)^{x+2} = e^2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{7x} = e^{35}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3} + 3x} = 1$$

17.- Calcula los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 5} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x}{3 - x^2} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 4x^2}{3x - 2} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 3}{3x} - 4x & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{3x + 1} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x + 1} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 3x + 2 - \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x - 1} & \end{array}$$

Sol: a) 1/3; b) -1/2; c) -2; d) -35/3; e) 1/4; f) 1; g) 3/4; h) 2

18.- Calcula los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} \right)^x & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x}{x^2 - 2} \right)^{x+1} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 2}{x + 1} \right)^{x+1} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 2x}{3x^2 + 1} \right)^{15x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 3x} \right)^{\frac{1}{x}} & \text{f) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - x}} \right)^x \\ \text{g) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} \right)^{x-2} & \text{h) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2x}{x^2 - 1} \right)^{\frac{3}{x^2}} & \end{array}$$

Sol: a) 1; b) 1/e; c) e⁻³; d) e⁻¹⁰; e) 1; f) √e; g) e; h) 1

19.- Calcula los límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 3x} \right) \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} \right)$$

Sol: a) 3/2; b) 0

20.- Calcula los siguientes límites teniendo en cuenta a que tiende la incógnita:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}}{x} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{2x + 1} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{2x} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x - 2}} \end{array}$$

Sol: a) 3; b) 1; c) 2; d) ∞; e) √2/4; f) 0; g) ∞; h) 2

21.- Calcula los siguientes límites teniendo en cuenta a que tiende la incógnita:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{\frac{x}{3}} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{2}{x}} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} (2+x)^{\frac{x}{x+1}} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-1}{2} \right)^{\frac{3}{x-3}} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{2-x} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 3} (2x-5)^{\frac{2x-6}{x^2-9}} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}} \end{array}$$

Sol: a) e; b) e²; c) 1/e; d) 1; e) e^{3/2}; f) e; g) -∞; h) 1; i) 0

22.- Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^2 - a^2} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x}} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})) \\
 \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 5x}{x^4 - x^3 + x - 1} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^3 + 4x^2 - 11x - 2} \\
 \text{j) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4}{x^4 + 4x^3 + 4x^2} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 6x^2 + 8x - 3}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} - \frac{x^2-4}{x-2} \right)
 \end{array}$$

23.- Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{x - 4} \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + 3x - 4} \\
 \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4} \\
 \text{j) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{\sqrt{x+2} - 2} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} \\
 \text{m) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} & \text{n) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{7+x} - 3} & \text{o) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1/x - 1/2}{x - 2}
 \end{array}$$

24.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x^2 - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \frac{x+4}{3} & \text{si } x > 2 \end{cases} \\
 \text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 5x & \text{si } 1 < x \leq 5 \end{cases} & \text{d) } f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } -4 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 3x - 1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \\
 \text{e) } f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1-x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} & \text{f) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{x^2} & \end{cases}
 \end{array}$$

Sol: a) Continua en \mathbb{R} ; b) Continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; c) Continua en $(-\infty, 1) \cup (1, 5)$; d) Continua en $[-4, 3]$; e) Continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; f) Continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

25.- Halla el valor de k para que sean continuas las funciones:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ k & \text{si } x \geq 2 \end{cases} & \text{b) } f(x) &= \begin{cases} 3 + x & \text{si } x \leq -2 \\ -x - 1 & \text{si } -2 < x < 1 \\ kx + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases} & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x - 2}{x^2 - 4} & \text{si } x \neq 2 \\ k & \text{si } x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Sol: a) k=3; b) k=-4; c) k=3; d) k=1/4

26.- Representa y estudia la continuidad de las funciones:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases} & \text{b) } f(x) &= \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 6 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Sol: a) Continua en $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$; b) Continua en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; c) Continua en \mathbb{R} ; d) Continua en \mathbb{R}

27.- Indica para qué valores de \square son continuas las siguientes funciones.

$$\text{a) } f(x) = 3 - \frac{2}{x} \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{-x} \quad \text{c) } f(x) = \sqrt{x-1} \quad \text{d) } f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

Sol: a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; b) $(-\infty, 0]$; c) $[1, +\infty)$; d) $[-2, 2]$