

TRIGONOMETRÍA

- 1.- ¿Existe un ángulo "x" tal que $\sin x = 1/2$ y $\cos x = 1/4$? ¿Puede valer el seno de un ángulo $1/8$?
Sol: no, si.
- 2.- Calcula $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, y $\operatorname{cotg} x$, si $\cos x = 0,6$ y $\operatorname{tg} x < 0$.
Sol: $\sin x = -0,8$; $\operatorname{tg} x = -4/3$, $\sec x = 5/3$; $\operatorname{cosec} x = -5/4$; $\operatorname{cotg} x = -3/4$.
- 3.- Si $\operatorname{tg} \alpha = 3/2$ y no pertenece al primer cuadrante halla las demás razones trigonométricas.
Sol: $\sin \alpha = -3/\sqrt{13}$, $\cos \alpha = -2/\sqrt{13}$
- 4.- Calcular en función de las razones trigonométricas de ángulos conocidos las razones de: 120° , 135° , 150° , 180° , 210° , 225° , 240° , 270° , 300° , 315° , 330° .
Sol: $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$, $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$; $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ$, $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ$; $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$, $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$; $\sin 180^\circ = \sin 0$, $\cos 180^\circ = -\cos 0$; $\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ$, $\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ$; $\sin 225^\circ = -\sin 45^\circ$, $\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ$; $\sin 240^\circ = -\sin 60^\circ$, $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ$; $\sin 270^\circ = -\sin 90^\circ$, $\cos 270^\circ = -\cos 90^\circ$; $\sin 300^\circ = -\sin 60^\circ$, $\cos 300^\circ = \cos 60^\circ$; $\sin 315^\circ = -\sin 45^\circ$, $\cos 315^\circ = \cos 45^\circ$; $\sin 330^\circ = -\sin 30^\circ$, $\cos 330^\circ = \cos 30^\circ$
- 5.- Estudia que ángulos pueden tener las siguientes relaciones entre sus razones trigonométricas considerando que α pertenece al primer cuadrante: a) $\sin \alpha = \sin \beta$; b) $\cos \alpha = -\cos \beta$; c) $\sin \alpha = -\cos \beta$; d) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$.
Sol: a) $\beta = 180 - \alpha$; b) $\beta = 180 - \alpha$ ó $\beta = 180 + \alpha$; c) $\beta = 90 + \alpha$ ó $270 - \alpha$; d) $\beta = 180 + \alpha$
- 6.- Calcular las razones trigonométricas de: -225° , 480° , -660° , -1770° , 1440° .
Sol: $\sin(-225^\circ) = \sqrt{2}/2$, $\cos(-225^\circ) = -\sqrt{2}/2$; $\sin 480^\circ = \sqrt{3}/2$, $\cos 480^\circ = -1/2$; $\sin(-660^\circ) = \sqrt{3}/2$, $\cos(-660^\circ) = 1/2$; $\sin(-1770^\circ) = 1/2$, $\cos(-1770^\circ) = \sqrt{3}/2$; $\sin 1440^\circ = 0$, $\cos 1440^\circ = 1$
- 7.- Calcula las razones trigonométricas de 215° si $\operatorname{tg} 35^\circ = 0,7$.
Sol: $\sin 215^\circ = -0,57$; $\cos 215^\circ = -0,82$; $\operatorname{tg} 215^\circ = 0,7$
- 8.- Sabiendo que el $\sin 20^\circ = 0,342$. Calcula el seno del ángulo 40° .
Sol: 0,643..
- 9.- Hallar las razones trigonométricas de 75° .
Sol: $\sin 75^\circ = \sqrt{2}/4 + \sqrt{6}/4$; $\cos 75^\circ = \sqrt{6}/4 - \sqrt{2}/4$
- 10.- Sabiendo que $\sin 20^\circ = 0,342$, calcula las razones trigonométricas de 40° .
Sol: $\sin 40^\circ = 0,643$, $\cos 40^\circ = 0,766$
- 11.- Sabiendo que α es un ángulo situado en el segundo cuadrante y que $\operatorname{tg} \alpha = -1/4$, halla las razones trigonométricas de 2α .
Sol: $\sin(2\alpha) = -8/17$; $\cos(2\alpha) = 15/17$
- 12.- Sin tablas ni calculadora, determina: a) $\sin 105^\circ$, b) $\cos 15^\circ$, c) $\operatorname{tg} 75^\circ$.
Sol: a) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$; b) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$; c) $(\sqrt{3} + 1)/(\sqrt{3} - 1)$
- 13.- La base de un triángulo isósceles mide 60 cm y los lados iguales 50 cm. Calcula sus ángulos.
Sol: 53° , 53° , 74° .
- 14.- La base de un triángulo isósceles mide 20 m y el ángulo opuesto 74° . Calcula los lados y la superficie.
Sol: $x = 50/3$; $S = 400/3 \text{ m}^2$.

15.- En un triángulo el ángulo A mide 75° , el ángulo B 35° y el lado a 30 m. a) Calcula el resto de los elementos del triángulo y su área. b) Haz lo mismo para el triángulo de elementos: A = 100° , B = 30° , b = 20 m.

Sol: a) C = 70° , b = 17,8, c = 29,2; Area = 250,9 m² b) C = 50° , a = 39,4, c = 30,64; Area = 301,75 m²

16.- Sin calculadora, resuelve los siguientes triángulos:

a) a = 10 cm, B = 45° y C = 75°

b) b = 4 m, A = 15° , B = 30°

Sol: a) A = 60° , b = $10\sqrt{2/3}$; c = $5(\sqrt{6} + \sqrt{2})/3$; b) c = $4\sqrt{2}$, C = 135° , a = $4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

17.- Calcular el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 6 m.

Sol: 7 m.

18.- Calcula la longitud de los lados de un paralelogramo cuyas diagonales son de 20 y 16 cm. y las diagonales forman entre sí un ángulo de 37° .

Sol: 6 y 17,1 cm.

19.- Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin 2x = -1/2$

b) $\cos x = \sqrt{3}/2$

c) $\operatorname{tg} x = 1$

d) $\sin 3x = \sqrt{3}/2$

d) $\cos^2 x = \sin^2 x$

e) $\sin x = -\cos x$

f) $\cos(2x) - 2\cos x + 1 = 0$

Sol: a) $x = 105 + 180k$; $165 + 180k$; b) $x = 30 + 360k$; $330 + 360k$; c) $x = 45 + 180k$; d) $x = 20 + 120k$; $40 + 120k$; d) $45 + 90k$; e) $135 + 180k$; f) $x = \pi/2 + 2k\pi$; $x = 0 + 2k\pi$

20.- Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 2\sin \alpha$

b) $2\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x = 0$

c) $\sin^2 x - \sin x + 1/4 = 0$

d) $\cos^2 x = (\cos x)/2$

e) $\sin 2x = \sin x$

f) $\cos 2x = \sin(x + 180^\circ)$

Sol: a) $\alpha = 60 + 360k$, $\alpha = 300 + 360k$, $\alpha = 360k$; b) $x = 90 + 360k$; c) $x = 30 + 360k$, $x = 150 + 360k$; d) $x = 90 + 180k$, $x = 60 + 360k$, $x = 300 + 360k$; e) $x = 180k$, $x = 60 + 360k$, $x = 300 + 360k$; f) $x = 90 + 360k$, $x = 210 + 360k$, $x = 330 + 360k$

21.- Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin^2 x$

b) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos^2 x$

c) $\sec^2 \alpha = (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$

d) $\cos^2 \alpha = \operatorname{cotg}^2 \alpha / (1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha)$

d) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin(2\alpha)$

e) $\operatorname{tg}(45 + \alpha) - \operatorname{tg}(45 - \alpha) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$

f) $(1 + \cos 2x) \cdot \operatorname{tg} x = 2 \sin(2x)$

g) $\cos(x + 45^\circ) \cdot (\cos x - \sin x) = \sqrt{2}/2 \cos 2x$

h) $\sin^2 x = 1/2 (1 - \cos 2x)$

i) $\cos^2 x = 1/2 (1 + \cos 2x)$

j) $\frac{\sin x - \operatorname{cosec} x}{\cos x - \sec x} = \operatorname{cotg}^3 x$

k) $\frac{\cos(x + y) \cdot \cos(x - y)}{\cos x - \sin y} = \cos x + \sin y$

22.-- Decir si son ciertas o no las igualdades:

a) $\cos(2x) = 2\cos x$

b) $\cos(\pi) = 2\cos(\pi/2)$

c) $\sin 2\pi = 2 \sin \pi$

d) $\cos 2\pi = 2 \cos \pi$

e) $\sin(\pi/3) = 2\sin(\pi/6)$

Sol: a) No; b) No; c) Sí; d) No; e) No

Problemas de trigonometría

1.- Calcula la altura de una torre, si situándonos a 20 m de su pie vemos la parte más alta bajo un ángulo de 45° .

Sol: 20 m

2.- El ángulo de elevación de una torreta eléctrica es de 45° a una distancia de 10 m de la torreta. Si el observador se encuentra a 1 m sobre el suelo. Calcula la altura de la torreta.

Sol: 11 m.

3.- Desde mi casa veo la fuente que está en el centro de la plaza mayor y también veo el ayuntamiento. He preparado un teodolito para calcular el ángulo formado por dichas visuales y ha dado $26^\circ 23'$. La distancia desde mi casa a la fuente es de 40 m y la distancia de la fuente al ayuntamiento es de 30 m. ¿Qué distancia hay desde mi casa al ayuntamiento?.

Sol: 60 m; 11,67 m

4.- Dos amigos van a subir una montaña de la que desconocen la altura. A la salida del pueblo han medido el ángulo de elevación y obtuvieron que era de 30° . Han avanzado 300 m hacia la montaña y han vuelto a medir y ahora es de 45° . Calcula la altura de la montaña.

Sol: 410 m.

5.- Dos amigos observan desde su casa un globo que está situado en la vertical de la línea que une sus casas. La distancia entre sus casas es de 3 km. Los ángulos de elevación medidos por los amigos son de 45° y 60° . Halla la altura del globo y la distancia de ellos al globo.

Sol: 1900 m de altura, 2690 m de uno y 2198 m del otro.

6.- Dos amigos andan a 4 km/h. Llegan a un punto del que parten dos caminos que forman entre sí un ángulo de 60° y cada una toma un camino. ¿A qué distancia se encontrarán al cabo de una hora?.

Sol: 4 km.

7.- Un avión vuela entre A y B que distan 7 km. Las visuales desde el avión de A y B forman un ángulo de 45° y 37° con la horizontal. a) ¿A qué altura está el avión?; b) Si una persona se encuentra en la vertical bajo el avión, ¿a qué distancia se encuentra de cada ciudad?.

Sol: a) 3 km; b) 3 km de A; 4 km de B.

8.- Tres pueblos están unidos por carreteras: $AB = 10$ km, $BC = 12$ km y el ángulo formado por AB y BC es de 120° . Cuánto distan A y C.

Sol: 19 km.

9.- Van a construir un túnel del punto A al punto B. Se toma como referencia una antena de telefonía (C) visible desde ambos puntos. Se mide entonces la distancia $AC = 250$ m. Sabiendo que el ángulo en A es de 53° y el ángulo B es de 45° calcula cuál será la longitud del túnel.

Sol: 350 m.

10.- Un avión vuela horizontalmente a una determinada altura "h". Cuando se encuentra sobre la vertical de un punto A, ve la torre del aeropuerto bajo un ángulo de depresión de 30° . Al aproximarse 1000 m ve la misma luz bajo un ángulo de 60° . Halla: a) La altura a la que vuela el avión; b) La distancia del punto A a la torre del aeropuerto.

Sol: a) $h = 500\sqrt{3}$ m; b) $x = 1500$ m.

11.- Un avión que está volando a 500 m de altura distingue un castillo con un ángulo de depresión de 15° . ¿A qué distancia del castillo se halla?.

Sol: 1932 m.

12.- Estando situado a 100 m de un árbol, veo su copa bajo un ángulo de 30° . Mi amigo ve el mismo árbol bajo un ángulo de 60° . ¿A qué distancia está mi amigo del árbol?

Sol: 100/3 m.

13.- Para medir la altura de una montaña hallamos el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo 53° . Nos alejamos 175 m y ahora el nuevo ángulo es de 37° . ¿Cuanto mide la altura de la montaña?. ($\text{sen } 53^\circ = 0,8$; $\text{cos } 53^\circ = 0,6$).

Sol: 300 m.

14.- Desde una altura de 3000 m un piloto observa la luz de un aeropuerto bajo un ángulo de depresión de 30° . Determina la distancia horizontal entre el avión y el aeropuerto.

Sol: $3000\sqrt{3}$ m.

15.- Andrés mide 180 cm y su sombra 135 cm. ¿Qué ángulo forman en ese instante los rayos de sol con la horizontal?

Sol: 53°

16.- Calcular la anchura de un río si nos colocamos enfrente de un árbol de la otra orilla y luego al desplazarnos 100 m paralelamente al río observamos el mismo árbol bajo un ángulo de 20° .

Sol: 36,4 m.

17.- El viento tronza un árbol, la punta se apoya en el suelo, en un punto situado a 10 m del pie, formando un ángulo de 30° con el plano horizontal. ¿Cuál era la altura del árbol?

Sol: $10\sqrt{3}$ m.

18.- Un avión vuela durante dos horas a 200 km/h en dirección NO. Calcula la distancia que recorre hacia el Norte y hacia el Oeste.

Sol: $x = y = 200\sqrt{2}$ km.

19.- Desde dos puntos A y B separados entre sí 60 m, se dirigen dos visuales a un árbol situado en la recta AB en un punto entre A y B. El observador de A lo ve bajo un ángulo de 50° y el de B bajo un ángulo de 40° . Calcular: a) la altura del árbol y la distancia de A al pie de la vertical en la que se encuentra el árbol.

Sol: $h = 29,5$ m; $d = 24,8$ m y 30,5 m.

20.- Un teleférico recorre 200 m con un ángulo de elevación constante de 25° . ¿Cuántos metros ha avanzado en la horizontal, y cuántos metros ha ganado de altura?

Sol: $d = 181$ m; $h = 84,5$ m.

21.- Dos móviles parten de un punto al mismo tiempo, siguiendo dos trayectorias rectilíneas que forman entre sí un ángulo de 135° y con velocidades de 10 y 20 m/s respectivamente. Al cabo de cinco minutos ¿qué distancia los separa?

Sol: 8394 m

22.- Calcula la altura de una torre sabiendo que a cierta distancia de su pie vemos el punto más alto bajo un ángulo de 60° , y si nos alejamos 20 m de dicho punto vemos el punto más alto bajo un ángulo de 30° . ¿A qué distancia nos encontramos inicialmente del pie de la torre?

Sol: $h = 10\sqrt{3}$ m; $x = 10$ m

23.- Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde los puntos A y B de una orilla se observa un punto P de la orilla opuesta, las visuales forman con la dirección de la orilla ángulos de 45° y 60° respectivamente. Calcula la anchura del río sabiendo que la distancia entre A y B es de 12,62 m.

Sol: 8 m

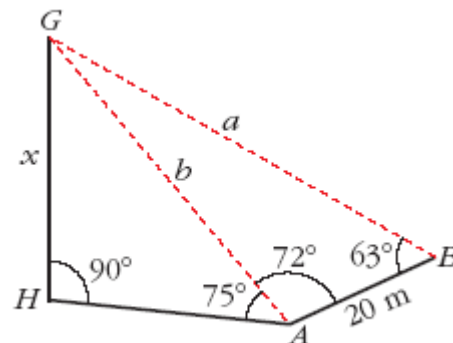
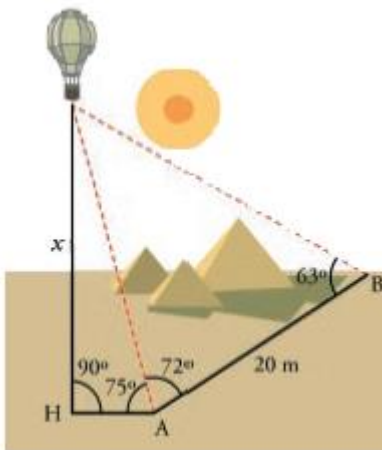
24.- Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, A y B , que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con AB ángulos de 40° y 65° . ¿A qué distancia de A y B se encuentra la emisora?

25.- Desde el pueblo B observamos un castillo C y una abadía A , formándose entre ambos un ángulo de 108° . Sabiendo que la distancia BC es de 1200 m. y BA es de 700 m, hallar la distancia entre el castillo y la abadía.

26.- Un topógrafo situado en C , localiza dos puntos A y B en los lados opuestos de un lago. Si C está a 5.000 m. de A y a 7.500 m. de B y el ángulo ACB mide 35 grados. ¿Cuál es el ancho del lago?

27.- Un grupo de personas va a medir la distancia que separa los dos pilares (los vamos a llamar A y B) de un puente para peatones que se va a construir para salvar una autopista urbana. Para hacerlo trazaron en el suelo una línea AC con una cuerda que medía 100 m. Colocaron en A (uno de los pilares) un teodolito y midieron el ángulo $CAB = 54^\circ$. Luego repitieron la operación en el punto C y midieron $ACB = 75^\circ$. ¿Cuánto mide el puente?

28.- Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto A ? ¿Cuánto del punto B ? ¿A qué altura está el globo?



29.- Un avión P de reconocimiento vuela a 1000 m de un punto R sobre la superficie del agua, localiza un velero S con un ángulo de depresión de 37° y un buque T con un ángulo de depresión de 21° , como se muestra en la figura. Además el ángulo SPT resulta ser de 110° . Calcula la distancia entre el velero y el buque.

