

NUMEROS COMPLEJOS

1. Clasifica los siguientes números complejos en reales e imaginarios. Di, para cada uno, cuál es la parte real y cuál la imaginaria. a) $(3i)$; b) $1/3-5/2 i$; c) $6/5; -3i$; d) $\sqrt{3} - \sqrt{5} i$; e) 0 ; f) i ; g) $(1/3)-i$; h) -15 .

2. Escribe tres números complejos imaginarios puros, tres números imaginarios y tres números reales.

3. Representa gráficamente los números complejos: a) $(3+4i)$; b) -4 ; c) $-2i$; d) $(-2+3i)$

4. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de: a) $-3+5i$; b) $3-2i$; c) 6 ; f) $5i$; g) 3 ; h) $-4i$.

5. Escribe en las formas binómica y trigonométrica los números complejos: a) $3\pi/3$; b) 3_{135° ; c) 1_{270° .

Sol: a) $3(\cos 60+i \operatorname{sen} 60)=3/2+3\sqrt{3}/2 i$; b) $3(\cos 135+i \operatorname{sen} 135)=-3\sqrt{2}/2+3\sqrt{2}/2 i$; c) $\cos 270+i \operatorname{sen} 270=-i$

6. Expresa en forma binómica y en forma polar el conjugado y el opuesto del número complejo: 6_{30° .

Sol: a) 6_{330° , $(3\sqrt{3}-3i)$; b) 6_{210° , $(-3\sqrt{3}-3i)$

7. Averigua como debe ser un complejo r_α para que sea: a) un número real; b) un número imaginario puro.

Sol: a) $\alpha=0+k\pi$; b) $\alpha=90+k\pi$

8. Escribe en forma polar: a) $1+\sqrt{3} i$; b) $-1+\sqrt{3} i$; c) $1-\sqrt{3} i$; d) $-1-\sqrt{3} i$; e) $3\sqrt{3}+3i$; f) $-3\sqrt{3}-3i$.

Sol: a) 2_{60} ; b) 2_{120} ; c) 2_{300} ; d) 2_{240} ; e) 6_{30} ; f) 6_{210}

9. Escribe en forma binómica: a) 2_{60° ; b) $1_{(3\pi/2)}$; c) 5_{450° ; d) 2_{180° . Sol: a) $(1+\sqrt{3} i)$; b) $-i$; c) $5i$; d) -2

10. dado $z = r_\alpha$. Expresar en forma polar: a) $-z$, b) z^{-1} , c) el conjugado de z , d) z^3 .

Sol: a) $r_{180+\alpha}$; b) $(1/r)_{-\alpha}$; c) $r_{-\alpha}$; d) $r^3_{3\alpha}$

11. Efectúa las siguientes operaciones entre números complejos:

a) $(2+3i)+(4-i)$

b) $(3+3i) - (6+2i)$

Sol: a) $(6+2i)$; b) $(-3+i)$

c) $(1+2i).(3-2i)$

d) $(2+i).(5-2i)$

Sol: c) $7+4i$; d) $12+i$

e) $(2+i)/(1-2i)$

f) $(7-i)/(3+i)$

Sol: e) i ; f) $2-i$

g) $5-3.[3+(2/3)i]$

h) $[2i \cdot (-i+2)] / (1+i)$

Sol: g) $-4-2i$; h) $3+i$

i) $(3+i).(2+i)-(1-i).(2-2i)$

j) $(3-2i)+(1+2i).(6-2i)-(2-i)$

Sol: i) $(5+9i)$; j) $11+9i$

12. Dado el número complejo $z=2+2i$, calcula y representa: a) su conjugado (z'); b) la suma $z+z'$; c) el producto $z.z'$. Sol: a) $2-2i$; b) 4 ; c) 8

13. Efectúa las siguientes operaciones: a) $1_{150}.3_{30}$; b) $6_{60}.2_{15}$; c) $2_{20}.1_{30}.2_{70}$; d) $6_{(2\pi/3)}.3_{90}$; e) $(5_{\pi/9})^9$

Sol: a) 3_{180} ; b) 3_{45} ; c) 4_{120} ; d) 2_{30} ; e) 5^9_{180}

14. Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado:

a) $2_{(\pi/2)}$

b) $4i$

c) $-3+i$.

Sol: a) $(1/2)_{(-\pi/2)}$; b) $-0,25i$; c) $(-3/10)-(1/10)i$

15. Simplifica las expresiones:

a) $\frac{3_{45} 2_{15}}{6_{30}}$

b) $\frac{2_{30} 3_{60}}{3_{120} 1_{300}}$

c) $\frac{2_{45} 2_{15}}{4_{90}}$

Sol: a) 1_{30} ; b) 2_{30} ; c) 1_{330}

16. Calcular los siguientes productos: a) $2(\cos 23^\circ+i \operatorname{sen} 23^\circ).5(\cos 12^\circ+i \operatorname{sen} 12^\circ)$. b) $(1+i).(2_{30^\circ})$.

Sol: a) $10(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)$; b) $(-1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i$

17. Efectua las siguientes operaciones: a) $690^\circ / \sqrt{2}$ 15° . b) $8_{120^\circ} / 4_{\pi/2}$.

Sol: a) $3\sqrt{2}_{75}$, b) 2_{30}

18. Halla $\frac{i^{32} \cdot i^{17}}{i^2 \cdot i^3}$

Sol: 1

19. Halla el módulo de los complejos:

a) $z = -2i(1+i)(-2-2i)(3)$

b) $w = \frac{(2-i)(-1+2i)}{(1-i)(1+i)}$

Sol: a) 24; b) 5/2

20. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $2+2i$ y $2-2i$.

Sol: $x^2 - 4x + 8 = 0$

21. Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 2x + 17 = 0$. Tiene dos raíces complejas. ¿Cómo son entre sí?

Sol: a) $1 \pm 4i$; b) conjugadas

22. Calcula, expresando el resultado en forma polar: a) $(1+i)^6$; b) $(1-i)^4$.

Sol: a) 8_{270° ; b) 4_{180°

23. Calcula: a) $\sqrt{-i}$; b) $\sqrt[3]{1+i}$; c) $\sqrt{-16}$

Sol: a) 1_{135° ; 1_{315° ; b) $\sqrt[3]{2}_{15^\circ}$, $\sqrt[3]{2}_{135^\circ}$, $\sqrt[3]{2}_{255^\circ}$; c) 4_{90} , 4_{270}

24. Calcular la siguiente operación expresando las tres raíces en forma polar:

$$\sqrt[3]{\frac{3+3i}{-3+3i}}$$

Sol: 1_{90} ; 1_{210} ; 1_{330}

25. Calcular:

a) i^{14} , i^{18} , i^{33}

b) Si $z_1 = 2-2i$; $z_2 = 1+3i$; y $z_3 = 2i$. Hallar: $2z_1 - z_2 + 2z_3$; $z_1 \cdot (z_2 - z_3)$; $(z_1)^2$.

c) Hallar: $(1+2i)^3$.

d) Hallar x para que se verifique que $(x-i)/(2+i) = 1-i$.

Sol: a) -1, -1, i; b) 3-3i, 4, -8i; c) -11-2i; d) x=3

26. Hallar: a) $(1+i)^{20}$, b) $(2\sqrt{3}-2i)^{30}$, c) $(-\sqrt{3}-i)^{12}$ y expresar el resultado en forma polar y binómica.

Sol: a) $2^{10}_{180} = -2^{10}$; b) $4^{30}_{180} = -4^{30}$; c) $2^{12}_{0} = 4096$

27. Hallar el módulo y el argumento de $\left(\frac{2+2i}{2-2i}\right)^4$

Sol: $1_{360} = 1$

28. ¿Cuánto debe valer x para que el número $(1+xi)^2$ sea imaginario puro?

Sol: $x = \pm 1$

29. Calcula los números x e y para que se verifique la igualdad: $(3+xi)+(y+3i)=5+2i$.

Sol: $x=-1$; $y=2$

30. Determina el valor de x para que se verifique la igualdad: $(x-i)/(1-i)=(2+i)$. Sol: $x=3$

31. Calcula los números reales x e y para que se verifique $(-4+xi)/(2-3i)=(y-2i)$. Sol: $x=-7$; $y=1$

32. Determinar los números reales x e y para que se cumpla: $\frac{x+2i}{1-i} + yi = 1$. Sol: $x=4$; $y=3$

33. Calcular a para que el complejo $z = (4+ai)/(1-i)$ sea: a) Imaginario puro. b) Real. Sol: a) $a=4$; b) $a=-4$

34. Determinar x para que el módulo del complejo $z=(x+i)/(1+i)$ sea $\sqrt{5}$. Sol: $x=\pm 3$

35. Resolver: $(4+xi)/(2+i) = y+2i$. Sol: $x=7$, $y=3$

36. Hallar el valor de x para que la operación $(2-xi)/(1-3i)$ tenga sólo parte real, sólo parte imaginaria y para que su representación esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante, es decir, la parte real e imaginaria sean iguales.

Sol: $x=6$, $x=-2/3$, $x=1$

37. Hallar x , para que la expresión: $z = (4+xi)/(2+i)$ sea: a) real, b) imaginario puro. Sol: a) $x=2$; b) $x=-8$

38. Determina el valor real de x de modo que el afijo del producto de los números complejos $3+xi$ y $4+2i$ sea un punto de la bisectriz del primer cuadrante. Sol: $x=1$

39. Calcular z en las ecuaciones siguientes:

$$a) \frac{z}{1-2i} + 1-i = 2+i$$

$$b) \frac{z}{2+i} + \frac{z-i}{2-i} = 3-2i$$

Sol: a) 5 ; b) $7/2-2i$

40. Resolver la ecuación $(1-i)z^2-7=i$. Sol: $z=2+i$ y $z=-2-i$

41. Si el producto de dos números complejos es -18 y dividiendo uno de ellos entre el otro, obtenemos de resultado $2i$. ¿Cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?. Sol: 3_{45° y 6_{135°

42. La suma de dos números complejos conjugados es 6 y la suma de sus módulos 10 . ¿De qué números complejos se trata?. Sol: $(3+4i)$, $(3-4i)$

43. Hallar dos números complejos sabiendo que: su diferencia es real, su suma tiene de parte real 8 y su producto vale $11-16i$. Sol: $(3-2i)$; $2i$

44. El producto de dos números complejos es -27 . Hallarlos sabiendo que uno de ellos es el cuadrado del otro. Sol: 3_{60° , 9_{120° .

45. Determina el número complejo sabiendo que si después de multiplicarlo por $(1-i)$ se le suma al resultado $(-3+5i)$ y se divide lo obtenido por $2+3i$ se vuelve al complejo de partida. Sol: $1+i$